**Тема:** «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.».

Одна из задач, часто встречающихся в научных вычислениях — это решение системы линейных уравнений, при этом обычно число уравнений равно числу неизвестных. Эту систему можно представить в матричном виде: .

Существует несколько основных способов решения таких систем.

Правило Крамера, согласно которому все компоненты решения представляются отношениями определителей с различными числителями и общим знаменателем. Если бы нам потребовалось решить систему, состоящую из 20 уравнений таким способом, то пришлось бы при вычислении определителей произвести умножений, плюс примерно такое же число сложений. Кроме того, правило Крамера часто ведет к чрезмерным ошибкам округления.

Часто для решения систем линейных уравнений используют матричный метод (метод обратной матрицы), т. е. .Однако во многих практических задачах вовсе необязательно, а даже нежелательно использовать обратную матрицу.

Вследствие этого обратим внимание на прямое решение систем линейных уравнений.

Важно различать два типа матриц:

1. *Хранимая матрица*, т. е. матрица, все n2 элементов которой хранятся в оперативной памяти машины.
2. *Разреженная матрица,* т. е. матрица большинство элементов которой нули, а ненулевые элементы которой могут храниться какой-либо специальной структуры данных или регенерироваться по мере необходимости.

Эти два типа матриц могут пересекаться. Хранимая матрица может иметь много нулевых элементов, т. е. быть в то же время и разреженной. Однако, если для нулевых элементов отводится место в оперативной памяти, то разреженность неважна. Очень большая неразреженная матрица может храниться на внешней памяти и вследствие этого требовать более изощренных способов обработки. *Ленточная матрица* — это матрица, все ненулевые элементы которой находятся вблизи главной диагонали.

***Линейные системы с хранимыми матрицами.***

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений с хранимой матрицей -матрицей  и векторами  и  порядка . Пусть -невырожденная матрица.

Рассмотрим метод последовательных исключения неизвестных (метод Гаусса).

При его применении важны два аспекта: выбор ведущего элемента и надлежащая интерпретация влияния ошибок округления.

В общем случае гауссово исключение состоит из двух этапов: *прямого хода* и *обратной подстановки*. Прямой ход состоит из  шагов. На  шаге кратные -го уравнения вычитаются из оставшихся уравнений с целью исключить -ое неизвестное.

При выборе ведущего элемента важно сделать так, чтобы множители по абсолютной величине не превосходили 1. Это можно обеспечить с помощью *частичного выбора ведущего элемента*. На -ом шаге прямого хода в качестве ведущего берется наибольший элемент (по абсолютной величине) в не приведённой части -го столбца. Строка, содержащая этот элемент переставляется с -ой строкой, чтобы перевести элемент в позицию (,). Такие же перестановки должны производиться и с элементами правой части . Неизвестные в векторе не переупорядочиваются, поскольку столбцы в не переставлялись. Если до начала исключений столбец или строка в  умножались на масштабирующий множитель, то проделывают компенсирующее изменение вычисленного решения. Обычная практика заключается в том, чтобы уравновесить матрицу, так чтобы максимальные элементы каждой строки и каждого столбца были примерно одной величины. Однако проблема построения гарантированного масштабирующего алгоритма пока не решена.

Ошибки округления, совершенные в процессе вычислений, почти всегда приводят к тому, что вычисленное решение в определенной степени отличается от теоретического. Действительно оно и должно отличаться, так как компоненты вектора обычно не являются числами с плавающей точкой.

Имеются две общие меры отклонения для (ошибка и невязка):

. Теория матриц говорит, что если одна из этих величин равна нулю, то и другая равна нулю. Итак, Гауссово исключение с частичным выбором ведущего элемента гарантированно дает малые невязки.

***Упражнения*:**

Решить систему методом Гаусса и найти невязки (значения разностей между свободными членами и результатами подстановки в уравнения системы найденных значений неизвестных):

а) 

б)

в) 

***Примечание.***  Чтобы уменьшить влияние ошибок округления и исключить деление на нуль на каждом этапе прямого хода, уравнения системы необходимо переставлять так, чтобы деление проводилось на наибольший по модулю в данном столбце элемент. Таким образом, в начале каждого этапа прямого хода решения системы следует добавить логику перестановки строк для выполнения приведенного условия.